数理解析研究所講究録
816巻 1992年 155-168

半単純対称空間のCasimir作用素の動径成分

東大・数理科学　関口英子(Hideko Sekiguchi)

§1 半単純対称空間のCasimir作用素の動径成分

G ; 実半単純連結Lie群　finite center

σ ; Gのinvolution.

θ ; GのCartan involution.　$\sigma\theta=\theta\sigma$

対応するLie環のinvolutionを同じ記号で書くと、GのLie環$\mathfrak{g}$の固有空間分解

$$\underset{\theta}{\mathfrak{g}} = \underset{+1}{\mathfrak{k}} + \underset{-1}{\mathfrak{p}} = \underset{\sigma\ +1}{\mathfrak{h}} + \underset{-1}{\mathfrak{q}}$$

が得られる。σによって決まる組$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$を半単純対称対と呼ぶ。

$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$の極大可換部分空間、$K,H,A$を$\mathfrak{k},\mathfrak{h},\mathfrak{a}$に対応するanalytic subgroupとする。組$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$に対応するルート系を$\Sigma=\Sigma(\mathfrak{a})$, そのWeyl群を$W(\Sigma)$とする。

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a},\lambda)=\{X\in\mathfrak{g};\ \mathrm{ad}(H)X=\lambda(H)X\quad H\in\mathfrak{a}\}$$

$$\mathfrak{g}^{\pm}(\mathfrak{a},\lambda)=\{X\in\mathfrak{g}(\mathfrak{a},\lambda);\ \sigma\theta X=\pm X\}$$

$m_\lambda^{\pm}:=\dim\mathfrak{g}^{\pm}(\mathfrak{a},\lambda)$; λ の符号

$m_\lambda = m_\lambda^+ + m_\lambda^-$; λ の重複度

とする。

$G=KAH$ 分解に対する Casimir 作用素の動径成分は、

$a^\lambda\neq 1$ ($^\forall\lambda\in\Sigma(\mathfrak{a})$) なる $a\in A$ に対し、

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}H_j^2+\sum_{\lambda\in\Sigma(\mathfrak{a})^+}\left\{m_\lambda^+\frac{c_\lambda(a)}{s_\lambda(a)}+m_\lambda^-\frac{s_\lambda(a)}{c_\lambda(a)}\right\}Q_\lambda$$

となる。

$$\left(\begin{array}{l}\{H_j\}_{j=1\cdots n}\ ;\ \mathfrak{a}\text{ の正規直交基底},\ n=\dim\mathfrak{a}\\ Q_\lambda\in\mathfrak{a}\ \text{s.t.}\ \langle H,Q_\lambda\rangle=\lambda(H)\quad(H\in\mathfrak{a})\\ c_\lambda(a)=\frac{1}{2}(a^\lambda+a^{-\lambda})\qquad s_\lambda(a)=\frac{1}{2}(a^\lambda-a^{-\lambda})\end{array}\right)$$

リーマン対称空間の場合は、

(1.1) $m_\lambda^-=0 \qquad m_{w\lambda}^+=m_\lambda^+ \quad (w\in W(\Sigma))$

が、成り立っている。Heckman-Opdam は、(1.1)の条件の下で一般の複素数 m_λ に対しても、$W(\Sigma)$ の不変式環と同型な可換な微分作用素環で Δ を含むものが存在することを示した。([H1],[H2],[H-O],[Op1],[Op2]) そこで、(1.1)の条件を

満たす複素数m_λに対して定義されたΔを、Heckman-Opdam型作用素と呼ぶことにする。

<u>定理1.2</u> 半単純対称空間のCasimir作用素の動径成分は、簡単な座標変換や複素化した座標の下での原点のとりかえによって、Heckman-Opdam型作用素に変換される。

<u>定義1.3</u>([O-S]) 任意のsimple root λに対して

$$m_\lambda^+ \geq m_\lambda^-$$

が成り立つ時、半単純対称対$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$は、basicであるという。

注 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$がbasicの時

$$m_{w\lambda}^\pm = m_\lambda^\pm \quad (\forall w \in W(\Sigma))$$

が、成り立つ。([O-S])

定理1.2の証明

1)符号の性質を調べる。

例 BC_1型の場合

$$\Delta = H^2 + \left\{ m_\lambda^+ \frac{c_\lambda(a)}{s_\lambda(a)} + m_\lambda^- \frac{s_\lambda(a)}{c_\lambda(a)} + 2m_{2\lambda}^+ \frac{c_{2\lambda}(a)}{s_{2\lambda}(a)} + 2m_{2\lambda}^- \frac{s_{2\lambda}(a)}{c_{2\lambda}(a)} \right\} Q_\lambda$$

$$= H^2 + \left\{ (m_\lambda^+ - m_\lambda^-) \frac{c_\lambda(a)}{s_\lambda(a)} + 2(m_{2\lambda}^+ + m_\lambda^- - m_{2\lambda}^-) \frac{c_{2\lambda}(a)}{s_{2\lambda}(a)} + 4m_{2\lambda}^- \frac{c_{4\lambda}(a)}{s_{4\lambda}(a)} \right\} Q_\lambda$$

ここで

$m_{2\lambda}^- \neq 0$ の時、$m_\lambda^+ = m_\lambda^-$ が成り立つ([O-S])。

従って、Δ は定数倍の座標変換によって、Heckman-Opdam 型作用素になる。

BC₁ 型以外の場合も、半単純対称対$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が basic ならば、同様にしてルートの符号が以下のような性質をもつことが分かる。([Sh])

I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma(\mathfrak{a})$ $\underset{\lambda_2\quad\lambda_1}{\circ\!\Longrightarrow\!\circ}$ とする。

① $2\lambda_1 \in \Sigma(\mathfrak{a})$, $m_{2\lambda_1}^- \neq 0$ の時 $m_{\lambda_2}^+ = m_{\lambda_2}^-$

② $2\lambda_1 \in \Sigma(\mathfrak{a})$, $m_{2\lambda_1}^- = 0$ $m_{\lambda_1}^+ \neq m_{\lambda_1}^-$ の時、$m_{\lambda_2}^- = 0$

③ $2\lambda_1 \notin \Sigma(\mathfrak{a})$ $m_{\lambda_2}^- \neq 0$ の時 $m_{\lambda_1}^+ = m_{\lambda_1}^-$

II $\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma(\mathfrak{a})$ $\underset{\lambda_2\quad\lambda_1}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ}$ とする。

$m_{\lambda_1}^- \neq 0$ の時 $m_{\lambda_1}^+ = m_{\lambda_1}^-$

このような符号の性質から、BC₁ 型の時と同様にして定理 1, 2 が証明できる。

2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が basic でない場合、複素化した座標の下で原点を移動して basic な場合に帰着することで示す。

定義1.4 ([O-S]) $\varepsilon ; \Sigma(\mathfrak{a}) \to \{\pm 1\}$なる写像で

$$\varepsilon(\alpha+\beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \qquad \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Sigma(\mathfrak{a})$$

$$\varepsilon(-\alpha) = \varepsilon(\alpha)$$

を満たすεをルート系$\Sigma(\mathfrak{a})$のsignatureと呼ぶ。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ がbasicでない時、$\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a})$に対してsignature εを

$$\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & m_\lambda^+ \geq m_\lambda^- \\ -1 & m_\lambda^+ < m_\lambda^- \end{cases}$$

とする。$\{Y_j\}$をsimple roots $\{\lambda_j\}$に対するdual basisとする。

$$a_\varepsilon = \exp \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{-1}\pi}{4} \left\{1 - \varepsilon(\lambda_j)\right\} Y_j$$

このa_εに対する$a \mapsto a \cdot a_\varepsilon = \tilde{a}$という座標変換によってbasicな場合に帰着される。 □

注意 H, Kに1次元表現をつけた帯球函数の満たす微分方程式系にも、同様にして定理1.2が拡張できることが分かる。(古典型の場合)

§2 Weyl群不変な可換微分作用素系

条件(1.1)の下で.

$$a = \exp H \in A \mapsto \delta = \prod_{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a})^+} (\operatorname{sh} \lambda(H))^{m_\lambda}$$

と. おくと.

$$(2.1)\quad \delta^{\frac{1}{2}} \circ \Delta \circ \delta^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{n} H_j^2 + \sum_{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a})^+} \frac{\frac{1}{2} m_\lambda (1 - \frac{1}{2} m_\lambda - m_{2\lambda})}{\operatorname{sh}^2 \lambda(H)} - \frac{1}{4} \Big| \sum_{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a})^+} m_\lambda \lambda \Big|^2$$

ここで、右辺の和の2項目をWeyl群不変な函数 R_1 として次の問題を考える。

1. Weyl群不変な可換微分作用素系で、以下に述べる(2.2)を満たすものが存在する時、R_1 はどのような函数か。
2. 1で与えた R_1 に対して、(2.2)を満たす微分作用素系は、どのような形で書けるか.

そこで上の問題を以下のように定式化する。

(Σ, E) ; rank n の既約かつ被約ルート系

　　(Σ^+ をfixしておく.)

$W(\Sigma)$; 対応するWeyl群

$S(E)$; E 上の symmetric algebra

∂ ; E の元 Y に対し.

$$\partial(Y) ; C^\infty(E) \ni \varphi(x) \mapsto \frac{d}{dt} \varphi(x + tY) \Big|_{t=0}$$

を対応させる写像を、$S(E)$ から E 上の微分作用素環への代数的準同型に拡張したもの.

$p_1 \cdots p_n$; $S(E)$ の $W(\Sigma)$-不変式環の homogeneous generators ($\deg p_1 = 2$ とする。)

<u>問題</u>　E 上の微分作用素系

$$D_j = \partial(p_j) + R_j \quad (j = 1 \cdots n)$$

で、次の条件(2.2)を満たすものを求めよ。

$$(2.2)\quad \begin{cases} D_j \text{ は } W(\Sigma)\text{-不変} \\ \operatorname{ord} R_j \leq \deg p_j - 1 \quad \text{但し } \operatorname{ord} R_1 = 0 \ (\text{i.e. } R_1 \text{ は函数}) \\ [D_i, D_j] = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n) \end{cases}$$

<u>注意</u>

① 標準的な座標を用いれば、

$$D_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) + R_1(x)$$

となる。

② Heckman-Opdam の構成した可換微分作用素系も上のような $\{D_j\}$ の形をしている。

<u>定理 2.3</u> (大島-関口) $\alpha_0 \in \Sigma^+$ を fix する。Σ が古典型の時

上記の R_1 は、1変数函数 $u(t)$, $v(t)$ によって

$$R_1(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\Sigma^+ \\ |\alpha|=|\alpha_0|}} u(\langle\alpha, x\rangle) + \sum_{\substack{\beta\in\Sigma^+ \\ |\beta|\neq|\alpha_0|}} v(\langle\beta, x\rangle)$$

と表わせる。

<u>A_{m-1} 型の場合</u>　$E = \{(x_1 \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m ;\ x_1 + \cdots + x_m = 0\} \subset \mathbb{R}^m \ni \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ により、E を $\mathbb{R}^m$ に埋め込んで、$W \simeq \mathfrak{S}_m$ を $(x_1 \cdots x_m)$ の座標の入れかえと考える。(rank は $n = m-1 \geq 2$ とする。)

$\Sigma^+ = \{e_i - e_j ;\ 1 \leq i < j \leq m\}$ としてよい。

$I = \{1, \cdots, m\}$ の部分集合 J と自然数 l に対し、

$$\Sigma(J; l) := \{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\} ;\ \alpha_1, \cdots \alpha_l\ \ e_j\ (j \in J) \text{ は互いに直交し、} \alpha_1 \cdots \alpha_l \in \Sigma^+\}$$

$$a_{l,J}(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\Lambda \in \Sigma(J; l)} \prod_{\alpha\in\Lambda} u(\langle\alpha, x\rangle) & (l \geq 1) \\ 1 & (l = 0) \end{cases}$$

とする。

$$(2.4) \qquad \Delta_k := \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{\substack{J\subset I \\ |J|=k-2l}} \left(a_{l,J}(x) \prod_{j\in J} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

<u>定理 2.5</u>(大島・関口) Σ が A_{m-1} 型とする。上記の可換な系が存在し、$\Omega \setminus \{0\}$ で定理 2.3 の $u(t)$ が正則になるような $\mathbb{C}$ の原点の近傍 Ω が存在するならば、

(2.6) $u(t) = C_1 \wp(t \mid 2\omega_1, 2\omega_3) + C_2$

$\left(\begin{array}{l} C_1, C_2 \in \mathbb{C},\ \wp \text{ は Weierstrass の } \wp \text{ 函数で} \\ 2\omega_1, 2\omega_3 \text{ は基本周期} \end{array} \right)$

逆に、(2.6)の $u(t)$ に対し、$\Delta_1 \cdots \Delta_m$ は互いに可換となり (2.2) を満たす系が得られる。

<u>注意</u>

① $\wp$-函数の基本周期を $2\omega_1 = \sqrt{-1}\pi$, $2\omega_3 = \infty$ とおくと

$$\wp(z \mid \sqrt{-1}\pi, \infty) = sh^{-2} z + \frac{1}{3}$$

が成り立つ。

② 一意性. Δ_2, Δ_3 によって $\mathbb{C}[\Delta_2, \cdots \Delta_m]$ が一意的に決まることも分かる。

定理2.5 について、例えば、A_2 型の時を考えてみよう.

$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$\Delta_2 = \sum_{i<j} \partial_i \partial_j + R_1 \qquad R_1$ は $\mathfrak{S}_3$ 不変

$\Delta_3 = \partial_1 \partial_2 \partial_3 + a^1 \partial_1 + a_1^2 \partial_2 + a_1^3 \partial_3 + a_0 \quad ; \mathfrak{S}_3$-不変

とする. $[\Delta_2, \Delta_3] = 0$ という条件から

$\exists\ u$; 偶函数

s.t. 「$a_i^i(x_1, x_2, x_3) = u(x_2 - x_3)$

$$\begin{cases} a_1^2(x_1, x_2, x_3) = u(x_3 - x_1) \\ a_1^3(x_1, x_2, x_3) = u(x_1 - x_2) \\ R_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i<j} u(x_i - x_j) \\ a_0 = \text{constant} \end{cases}$$

が分かり、更に u は

$$u(t)\{u'(s)+u'(s+t)\} + u(s+t)\{-u'(s)+u'(t)\} + u(s)\{-u'(t)-u'(s+t)\} = 0$$

を満たすことが分かる。

特に、原点を含む開集合 Ω があって、u が $\Omega\setminus\{0\}$ で正則とすると、

$$\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{C}\ ;\ u = C_1 \wp + C_2$$

$\wp$ は Weierstrass の $\wp$ 函数。

このことから、A_2 の時は定理2.4 が示される。一般の時はより複雑になるが同様にして示せる。

<u>例</u>　A_3 型の時、(2.4)の作用素を具体的に書くと次のようになる。

$$\Delta_2 = \sum_{1\le i<j\le 4} \partial_i \partial_j + \sum_{1\le i<j\le 4} u(x_i - x_j)$$

$$\Delta_3 = \sum_{1\le i<j<k\le 4} \partial_i \partial_j \partial_k + \sum_{i=1}^{4} \Big\{ \sum_{\substack{j,k\neq i \\ 1\le j<k\le 4}} u(x_j - x_k) \Big\} \partial_i$$

$$\Delta_4 = \partial_1\partial_2\partial_3\partial_4 + u(x_3-x_4)\partial_1\partial_2 + u(x_2-x_4)\partial_1\partial_3 + u(x_2-x_3)\partial_1\partial_4$$

$$+u(x_1-x_4)\partial_2\partial_3+u(x_1-x_3)\partial_2\partial_4+u(x_1-x_2)\partial_3\partial_4$$
$$+u(x_1-x_2)u(x_3-x_4)+u(x_1-x_3)u(x_2-x_4)$$
$$+u(x_1-x_4)u(x_2-x_3)$$

B_n, D_n型の場合　(2.2)を満たす微分作用素系$\{D_j\}$が存在すると仮定する。原点を含む開集合Ωがあって、u, vが$\Omega\setminus\{0\}$で正則とする。自明な場合を除くと、u, vは以下のものに限ることが証明される。

D_n $(n\geq 3)$型では、

$$u(t)=C_1\wp(t\,|\,2\omega_1, 2\omega_3)+C_0 \qquad C_0,\ C_1\in\mathbb{C}$$

又は、

$$u(t)=C_1t^2+C_2t^{-2}+C_0 \qquad C_0, C_1, C_2\in\mathbb{C}$$

B_n $(n\geq 3)$型では、

$$(2.6)\quad\begin{cases} u(t)=\dfrac{C_4\wp(t)^4+C_3\wp(t)^3+C_2\wp(t)^2+C_1\wp(t)+C_0}{\wp'(t)^2} \\ \qquad \wp(t)=\wp(t\,|\,2\omega_1, 2\omega_3) \qquad C_j\in\mathbb{C}\ (j=0,1,2,3,4) \\ v(t)=A_1\wp(t\,|\,2\omega_1, 2\omega_3)+A_0 \qquad A_0, A_1\in\mathbb{C} \end{cases}$$

又は、

$$(2.7)\quad\begin{cases} u(t)=C_1t^2+C_2t^{-2}+C_0 \qquad C_0, C_1, C_2\in\mathbb{C} \\ v(t)=A_1t^2+A_2t^{-2}+A_0 \qquad A_0, A_1, A_2\in\mathbb{C} \end{cases}$$

注意　B_2型では、上は構成できるが、それに限ることは言えていない。∞での Harish-Chandra 展開にあたる仮定、即ち

$s = e^{\alpha}$ として $u(\log s)$, $v(\log s)$ が、$0 < |s| \ll 1$ で正則とする。

上のような仮定の下で、

$$U(s) = u(\log s) = \sum_{k \geq k_2} a_k s^k$$

とする。$\{D_j\}$ が (2.2) を満たすことから、A型の時と同様な計算によって、$\xi = s^{k_2}$ と変換すると、$U(s)$は

$$\langle sh^{-2}\xi,\ sh^{-2}\xi/2,\ 1,\ ch\,\xi,\ ch\,2\xi \rangle$$

によって生成されることが分かる。(cf. (2.1))

(2.6)式で、$2\omega_1 = \sqrt{-1}\pi$, $2\omega_3 = \infty$, $t = \xi/2$ とすると、uは

$$\langle sh^6 t\, ch^{-2}t,\ sh^4 t\, ch^{-2}t,\ sh^2 t\, ch^{-2}t,\ ch^{-2}t,\ sh^{-2}t\, ch^{-2}t \rangle$$

によって生成され上の場合と一致している。従って (2.6)は、上の仮定を与えた場合の拡張になっていることが分かる。

例　u, v が (2.7) の形で与えられる時、D_1, D_2 は次のように書ける。(A_0, $C_0 = 0$ とおく。)

$$D_1 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + C_1\{(x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2\} + C_2\{(x_1+x_2)^{-2} + (x_1-x_2)^{-2}\}$$
$$+ A_1(x_1^2 + x_2^2) + A_2(x_1^{-2} + x_2^{-2})$$

$$D_2 = \partial_1^2\partial_2^2 + (A_1 x_2^2 + A_2 x_2^{-2})\partial_1^2 + (A_1 x_1^2 + A_2 x_1^{-2})\partial_2^2$$
$$+ [C_1\{(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2\} + C_2\{(x_1+x_2)^{-2} - (x_1-x_2)^{-2}\}]\partial_1\partial_2$$

$$
\begin{aligned}
&+[C_1\{(x_1+x_2)+(x_1-x_2)\}-C_2\{(x_1+x_2)^{-3}+(x_1-x_2)^{-3}\}]\,\partial_1\\
&+[C_1\{(x_1+x_2)-(x_1-x_2)\}-C_2\{(x_1+x_2)^{-3}-(x_1-x_2)^{-3}\}]\,\partial_2\\
&+\tfrac{1}{4}[C_1\{(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2\}+C_2\{(x_1+x_2)^{-2}-(x_1-x_2)^{-2}\}]\\
&+[2C_1+3C_2\{(x_1+x_2)^{-4}+(x_1-x_2)^{-4}\}]\\
&+(A_1x_1^2+A_2x_1^{-2})(A_1x_2^2+A_2x_2^{-2})\\
&+8C_2(A_2+A_1x_1^2x_2^2)(x_1^2-x_2^2)^{-2}+8C_1A_1\,x_1^2x_2^2
\end{aligned}
$$

References

[D] A. Debiard, Systèm différentiel hypergeómétrique et parties radiales des espaces symétriques de type BC_p, Springer Lecture Notes in Math. 1296 (1988), 42-124.

[H1] G.J. Heckman, Root system and hypergeometric functions II, Comp. Math. 64 (1987), 353-373

[H2] ——, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, Invent. Math. 103 (1991), 341-350.

[H·O] G.J. Heckman and E.M. Opdam, Root system and hypergeometric functions I, Comp. Math. 64 (1987) 329-352.

[Op1] E.M. Opdam, Root system and hypergeometric functions III, Comp. Math. 67(1988), 21-49.

[Op2] ___, Root system and hypergeometric functions IV, Comp. Math. 67(1988), 191-209.

[O.S] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair, Advanced Studies in Pure Math. 4(1984) 433-497

[Sj] J. Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, Publ. RIMS Kyoto Univ. 12 Suppl. (1977), 455-459.

[Sh] H. Sekiguchi, 半単純対称空間のカシミール作用素の動径成分について 修士論文 (1992)

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Forth Edition, Cambridge University Press, 1927.